

# Formulazione semplificata per il calcolo in forma chiusa del diagramma Momento-Curvatura di una sezione circolare cava in C.A.

Domenico Raffaele, Roberto Gentile, Mauro Mezzina

*DICATECh: Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e del Territorio, Edile e di Chimica. Via Orabona 4, 70126, Bari.*

*Parole chiave: valutazione di vulnerabilità, scala regionale, ponti a travata, momento-curvatura, sezione circolare cava.*

## ABSTRACT

Per un'analisi di vulnerabilità di un ponte a travata è possibile assumere che la curva di capacità della struttura sia approssimabile con la curva di capacità della pila critica. Il comportamento della pila critica può essere, in generale, influenzato da vari meccanismi quali la flessione, il taglio, gli effetti del second'ordine, lo sfilamento delle barre longitudinali o la loro instabilizzazione. Il comportamento flessionale è noto se si conosce il diagramma Momento-Curvatura della sezione d'incastro e la lunghezza di cerniera plastica. Considerando che gli altri meccanismi possono essere valutati con formulazioni approssimate l'aspetto chiave del problema è il diagramma Momento-Curvatura. Dopo aver valutato la sezione circolare piena in lavori precedenti, nella presente memoria si propone una procedura per valutare il diagramma Momento-Curvatura di una sezione circolare cava in C.A. definendo la posizione di alcuni suoi punti caratteristici. Per ognuno di questi si propone una soluzione adimensionale in forma chiusa che dipende da quattro parametri anch'essi adimensionali: rapporto tra raggio del foro e raggio esterno, rapporto di sforzo normale, rapporto meccanico di armatura longitudinale, rapporto volumetrico di staffatura. L'idea di base è quella di avere buone indicazioni sulle prestazioni dei materiali (snervamento, salto del copriferro, collasso, etc) basandosi su pochi parametri di input.

## 1 INTRODUZIONE

La vulnerabilità sismica è un tema attuale in ingegneria e in particolare si pone grande attenzione alle strutture da ponte al fine di redigere degli inventari a scala regionale. Infatti la maggior parte dei ponti italiani in C.A. è stata costruita intorno agli anni '60, facendo riferimento a normative che non prevedono una "filosofia antisismica" (Raffaele et al. 2014a) e studi basati sul monitoraggio di strutture esistenti (Uva et al. 2013) dimostrano che i suddetti inventari risultano essere estremamente necessari. Inoltre un ponte può essere un nodo cruciale di una rete di trasporti e per questo la sua performance deve essere garantita anche nei momenti immediatamente successivi ad un sisma (Raffaele et al. 2014b). Considerando il grande numero di strutture da analizzare e la ristrettezza delle risorse economiche a disposizione è impensabile eseguire un'analisi dettagliata per ognuna di esse (ad esempio un'analisi Pushover). Di solito le analisi a scala regionale si basano su

approcci semi empirici ma in questa memoria si propone una procedura basata su modelli meccanici (e relazioni costitutive dei materiali realistiche) che permetta di valutare la curva di capacità di un ponte a travata in C.A. basandosi su pochi parametri di input e con basso onere computazionale. L'idea è quella di ottenere la curva di capacità della struttura basandosi sulla cosiddetta analisi "Pushover semplificata" (Borzi et al. 2007). Quindi anziché studiare la risposta dell'intera struttura sotto l'azione di carichi incrementali si fa riferimento alla curva di capacità di una struttura ad un grado di libertà (gdl) equivalente. Inoltre, considerando che la dissipazione energetica di una struttura di questo tipo è concentrata nelle pile e l'impalcato nella maggior parte dei casi ha un comportamento elastico, per la modellazione della struttura ad un gdl equivalente si considerano solo le pile. In particolare si considera la pila critica (fig.1), definita come quella che manifesta il più alto rapporto domanda/capacità per un fissato stato limite. In questa procedura (Raffaele et al. 2014c) si approssima la curva di capacità dell'intero

ponete con la curva di capacità della pila critica e quest'ultima è calcolata tenendo in considerazione il comportamento flessionale (Momento-Curvatura della sezione di base) e i meccanismi alternativi che possono anticipare il collasso per flessione (taglio, effetti del second'ordine, sfilamento delle barre o loro instabilità). Dopo aver studiato il comportamento flessionale di una sezione circolare piena (Raffaele et al. 2015) in questa memoria si presenta una soluzione polinomiale in forma chiusa per il calcolo del diagramma Momento-Curvatura di una sezione circolare cava in C.A. definendo la posizione di alcuni punti caratteristici. Ciascuno di questi è definito il funzione di quattro parametri adimensionali: rapporto tra raggio interno e raggio esterno, sforzo normale adimensionalizzato, rapporto meccanico di armatura longitudinale, rapporto volumetrico di armatura trasversale. L'idea di base è che conoscendo un numero limitato di parametri quali geometria e armatura, ottenibili facilmente tramite un sopralluogo alla struttura, è possibile effettuare un'analisi di vulnerabilità di primo livello di un ponte a travata in C.A.

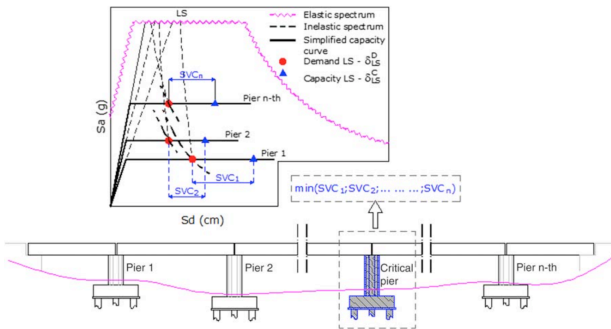


Figura 1. Determinazione della pila critica.

## 2 SINOPSI DELLA PROCEDURA

Il diagramma Momento-Curvatura della sezione circolare cava è ottenuto definendo la posizione di 7 punti caratteristici (definiti in seguito). Il momento e la curvatura di ciascuno di questi punti è calcolato con un polinomio di terzo grado. E' stato creato un database di analisi Momento-Curvatura (M- $\phi$ ) condotte con un software di calcolo (Esmaily et al. 2005) e i risultati ottenuti sono stati processati in ambiente MatLab al fine di definirne i punti caratteristici di ogni diagramma (M- $\phi$ ). Infine è stata eseguita una regressione lineare ai minimi quadrati per ottenere i polinomi caratteristici.

## 3 PARAMETRI DEL PROBLEMA

I parametri che influiscono sul comportamento flessionale di una sezione circolare cava sono molti: raggio interno, raggio esterno, copri ferro, forza assiale, resistenza a compressione e trazione del calcestruzzo, tensione di snervamento dell'acciaio, modulo di elasticità dell'acciaio, numero e diametro dei ferri dell'armatura longitudinale e trasversale, passo dell'armatura trasversale. E' chiaro che sarebbe impossibile considerare un così grande numero di parametri e quindi per rendere fattibile la costruzione del database di analisi sono state fatte alcune ipotesi:

- la resistenza a trazione del calcestruzzo è stata legata a quella a compressione tramite la relazione (NTC, 2008):

$$f_{ct} = 0.3 f_c^{2/3} \quad (1)$$

- l'acciaio dell'armatura trasversale ha le stesse caratteristiche di quello dell'armatura longitudinale, quindi:

$$f_{y,transv} = f_y \wedge E_{s,transv} = E_s \quad (2)$$

- l'armatura longitudinale consiste in un uguale numero  $n_l/2$  di ferri di diametro  $d_l$  sulla circonferenza esterna ed interna. Quindi l'area di armatura longitudinale vale:

$$A_s = \frac{n_l (\pi d_l^2)}{4} \quad (3)$$

- il copri ferro netto vale:

$$c = 0.02D \quad (4)$$

I restanti parametri sono raggruppati in quattro gruppi adimensionali: fattore di forma  $\alpha$  (rapporto tra raggio interno e raggio esterno), sforzo normale adimensionalizzato  $v$ , rapporto meccanico di armatura longitudinale  $\omega$ , rapporto volumetrico di armatura trasversale  $\rho_{sp}$ .

$$\alpha = \frac{r}{R} \quad (5)$$

$$v = \frac{N}{\pi(R^2 - r^2)f_c} \quad (6)$$

$$\omega = \frac{A_s f_y}{\pi(R^2 - r^2)f_c} \quad (7)$$

$$\rho_{sp} = \frac{A_s [2\pi(R-c) + 2\pi(r+c) + n_l(R-r-2c)]}{\pi [(R-c)^2 - (r+c)^2] s} \quad (8)$$

L'eq.7 si riferisce ad un confinamento realizzato come in fig.2. L'idea è quella di poter interpretare una variazione di  $v$  come una variazione di forza assiale agente  $N$ , del raggio esterno della sezione  $R$  o del raggio interno  $r$ . Analogamente per gli altri parametri adimensionali.

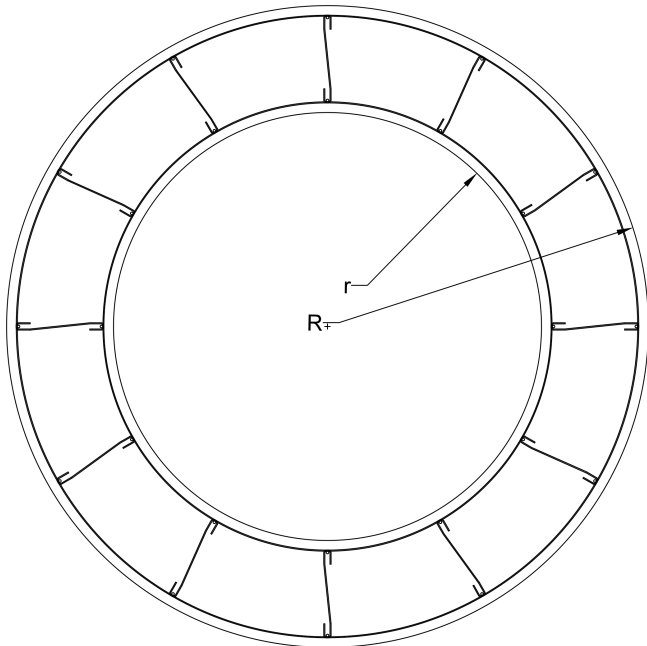


Figura 2. Distribuzione dell'armatura trasversale.

## 4 INTERVALLI DEI PARAMETRI

Per creare il database citato al par.2 è stato scelto un intervallo di variazione plausibile per ogni parametro adimensionale elencato nel par.3. In seguito sono stati individuati dei valori discreti all'interno di questi intervalli ed è stata condotta un'analisi Momento-Curvatura per ogni loro combinazione (720 analisi).

### 4.1 Fattore di forma

Considerando le dimensioni delle pile più comuni nella pratica progettuale l'intervallo considerato per questo parametro va da 0.6 a 0.8 ed in particolare i valori:

$$\alpha = \{0.6 \ 0.7 \ 0.8\}.$$

### 4.2 Sforzo normale

Il campo di variazione di questo parametro è stato analizzato quasi interamente (da 0 a 0.9) ed in particolare i valori:

$$v = \{0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9\}.$$

### 4.3 Armatura longitudinale

E' stato scelto un intervallo tra 0.05 e 0.4, in particolare i valori:

$$\omega = \{0 \ 0.05 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.4\}.$$

E' bene notare che, per  $\alpha=0.6$ , il valore  $\omega=0.4$  corrisponde a 44 ferri  $\phi 50$ , quindi l'intervallo individuato copre tutte le possibili configurazioni della pratica progettuale.

### 4.4 Armatura trasversale

L'intervallo considerato va da 0 a 0.04 ed in particolare sono stati scelti i valori:

$$\rho_{sp} = \{0 \ 0.001 \ 0.05 \ 0.01 \ 0.02 \ 0.04\}.$$

Anche in questo caso è giusto sottolineare che ad esempio per  $\alpha=0.6$  il valore  $\rho_{sp}=0.04$  corrisponde ad avere una staffa  $\phi 12$  ogni 4 cm (secondo il pattern di fig.2).

## 5 ESECUZIONE DELLE ANALISI

Per ogni combinazione dei parametri del par.4 è stata condotta un'analisi Momento-Curvatura. L'algoritmo risolutivo prevede la divisione della sezione in fibre e ad ognuna di esse è assegnato un legame tensione-deformazione. Alle fibre di calcestruzzo è assegnato un legame costitutivo con comportamento softening (Mander et al. 1988). Viene differenziato il comportamento delle fibre del nucleo confinato da quelle del copri ferro (fig.3). L'acciaio segue un legame costitutivo lineare fino allo snervamento ( $\epsilon_y, \sigma_y$ ), ha una tensione costante fino ad una deformazione pari a  $K_1 \epsilon_y$ , e in seguito ha andamento parabolico. Il picco della parabola è situato in corrispondenza della deformazione  $K_2 \epsilon_y$  mentre la deformazione ultima vale  $K_3 \epsilon_y$  (fig.4). La resistenza di picco è pari a  $K_4 \epsilon_y$ . Ai fini di questo studio i coefficienti sono tarati per ottenere una buona corrispondenza con i risultati sperimentali dell'acciaio B450C, quindi è stato usato  $K_1=10$ ,  $K_2=30$ ,  $K_3=55$ ,  $K_4=1.3$ . L'output dell'analisi consiste in una tabella testuale che contiene i valori di: curvatura, momento, profondità dell'asse neutro, deformazione nella fibra estrema del nucleo confinato di calcestruzzo, deformazione della barra di armatura più lontana da questa fibra.

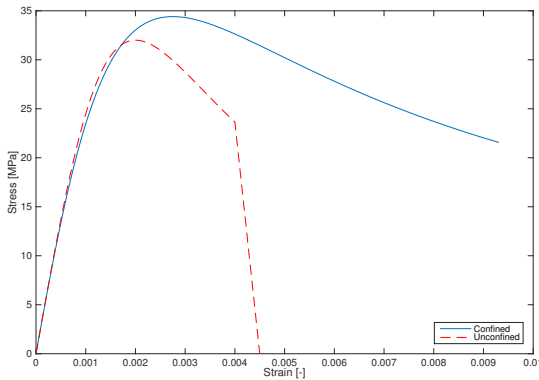


Figura 3. Legame costitutivo del calcestruzzo.

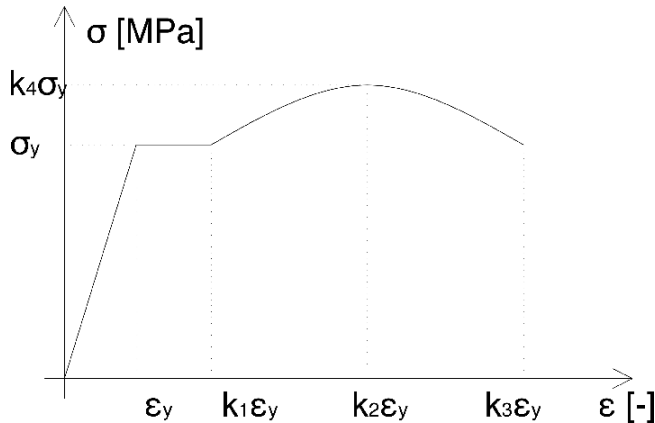


Figura 4. Legame costitutivo dell'acciaio.

## 6 POST PROCESSIONE DEL DATABASE

E' stato progettato un codice in ambiente MatLab che per ogni analisi del database estrae i seguenti punti caratteristici:

- **Cracking:** Se la curva (M- $\phi$ ) presenta un tratto decrescente in corrispondenza della prima fessurazione allora questo è selezionato come punto di cracking. Se invece questo comportamento non è apprezzabile (e questo succede per sforzi normali alti) allora si assume che il punto di cracking sia quello che provoca una deformazione pari a  $\epsilon_{ct} = f_{ct}/E_c$  nella fibra estrema del copri ferro;
- **“Snervamento” del calcestruzzo:** E' il punto in cui il legame costitutivo del calcestruzzo cessa di essere approssimabile linearmente. Si assume che questo avvenga per una deformazione del calcestruzzo pari a 0.002 nella fibra estrema del nucleo confinato;
- **Snervamento:** Questo punto è definito come il punto in cui la prima barra di armatura raggiunge la deformazione di snervamento oppure il calcestruzzo perde di linearità (punto precedente). Per snervamento della sezione si considera la

condizione che avviene prima tra le due appena menzionate;

- **Punto Nominale:** Condizione in cui la barra di armatura estrema raggiunge una deformazione pari a 0.015 oppure il calcestruzzo nella fibra estrema del nucleo confinato raggiunge una deformazione pari a 0.004;
- **Spalling:** Punto della curva a cui corrisponde una deformazione pari a 0.0045 nella fibra estrema del calcestruzzo confinato;
- **Picco del calcestruzzo:** Condizione per cui la deformazione della fibra estrema del calcestruzzo confinato raggiunge il picco del suo legame costitutivo;
- **Collapse:** Rappresenta il collasso della sezione. Esso può avvenire per il raggiungimento della deformazione ultima nel calcestruzzo o nell'acciaio.

Individuati i valori di momento e curvatura relativi a questi punti essi vengono resi adimensionali tramite le relazioni:

$$m = \frac{M}{\pi(1-\alpha^2)R^3 f_c} \quad (9)$$

$$\chi = \phi R \quad (10)$$

In fig. 5 si mostra un esempio di applicazione del codice Matlab per individuazione dei punti caratteristici.

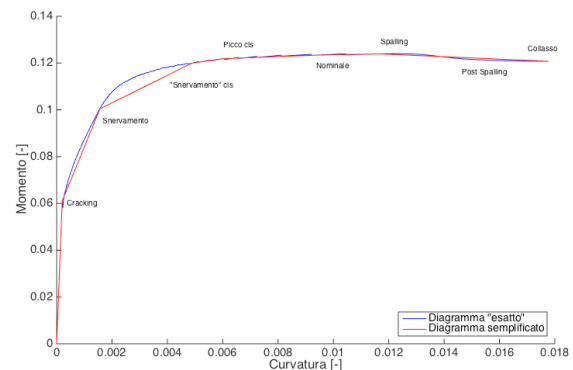


Figura 5. Individuazione dei punti caratteristici della diagramma Momento-Curvatura.

## 7 CURVE FITTING

Noti i valori caratteristici di momento e curvatura per ogni combinazione dei parametri  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $\rho_{sp}$  è stata condotta un'operazione di curve fitting per individuare delle funzioni approssimanti. Quindi per ogni valore di curvatura o momento caratteristici è stata

condotta una regressione lineare ai minimi quadrati per ottenere una funzione polinomiale di primo grado rispetto ad  $\alpha$  e di terzo grado rispetto ai restanti tre parametri adimensionali. E' importante sottolineare che le analisi con confinamento nullo ( $\rho_{sp}=0$ ) sono state studiate solo per avere dei valori di controllo e per questo motivo sono state escluse dalla regressione. Sono stati inoltre esclusi i casi che prevedono uno sforzo normale  $v=0.9$ . E' chiaro che l'uso manuale delle equazioni risulta essere praticamente impossibile ma per converso la loro implementazione in un codice di calcolo è molto semplice così come lo è il loro utilizzo.

## 8 APPLICAZIONE AD UN CASO REALE

Con l'intento di dimostrare che la procedura per la valutazione della legge Momento-Curvatura proposta nella seguente memoria può essere utilizzata come base di partenza per la valutazione della capacità sismica di un ponte a travata se ne presenta l'applicazione ad un caso pratico. Si supponga di aver individuato la pila critica di un ponte a travata e che essa abbia le caratteristiche illustrate nella tabella 1.

Tabella 1. Caratteristiche della pila critica.

L	D	t	c	$n_l$	$d_l$	$d_h$
[m]	[m]	[m]	[m]	[-]	[mm]	[mm]
6	3	0.5	0.05	40	26	10

s	$f_c$	$f_{ct}$	$f_{ys}$
[m]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
0.08	32	3	450

Secondo una procedura approssimata (Raffaele et al. 2014c) il comportamento di quest'ultima dipende dal grado di vincolo che l'impalcato esercita nei suoi confronti. Il comportamento può essere valutato considerando la "massa afferente" alla pila stessa che in generale dipende dalla direzione secondo la quale si sta conducendo l'analisi. Quindi è necessario analizzare un modello per la direzione longitudinale e uno per la direzione trasversale: nel particolare caso, dato che la sezione della pila gode di simmetria radiale, i modelli differiscono solo per la forza assiale applicata in testa, pari rispettivamente a 19000 KN e 13000 KN rispettivamente nella direzione longitudinale e trasversale. Conoscendo la legge Momento-

Curvatura nelle due direzioni e la lunghezza di cerniera plastica  $L_{pl}$  è possibile calcolare la legge Forza-Spostamento della pila dovuta al solo comportamento flessionale (eq. 11,12). Quest'ultima può essere in seguito "corretta" per considerare le altre possibili modalità di collasso. E' importante sottolineare che l'esempio è stato scelto in maniera tale da evitare qualsiasi correzione proprio per concentrare l'attenzione al comportamento flessionale.

$$\delta = \begin{cases} \frac{\phi L^2}{3} \dots \phi \leq \phi_y \\ \frac{\phi_y L^2}{3} + (\phi - \phi_y) L_{pl} (L - 0.5 L_{pl}) \dots \phi \leq \phi_y \end{cases} \quad (11)$$

$$F = M / L \quad (12)$$

E' stata calcolata la risposta sezionale tramite i polinomi approssimanti summenzionati e parallelamente la stessa operazione è stata compiuta attraverso un software con approccio a fibre (Esmaily et al. 2005). A partire dalla legge Momento-Curvatura calcolata con i due approcci è stata calcolata la curva di capacità tramite le eq. 11 e 12 ipotizzando  $L_{pl}=0.6m$ . Nelle figure 6 e 7 si presenta il confronto dei risultati per la direzione trasversale e si può notare come la procedura semplificata porti a risultati molto vicini a quelli "esatti" (ossia calcolati con un software ad hoc). I margini di errore, in termini di curvatura ultima e momento ultimo, entrambi inferiori al 2%.

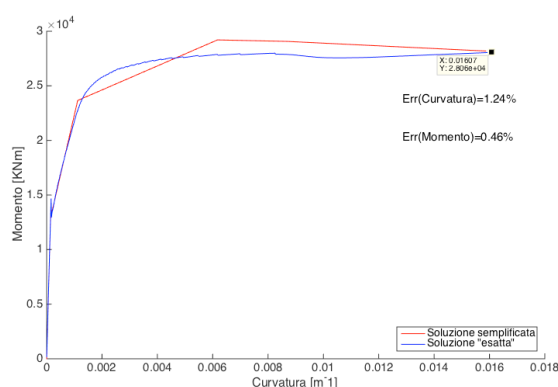


Figura 6. Confronto tra soluzione "esatta" e soluzione approssimata: Momento-Curvatura.

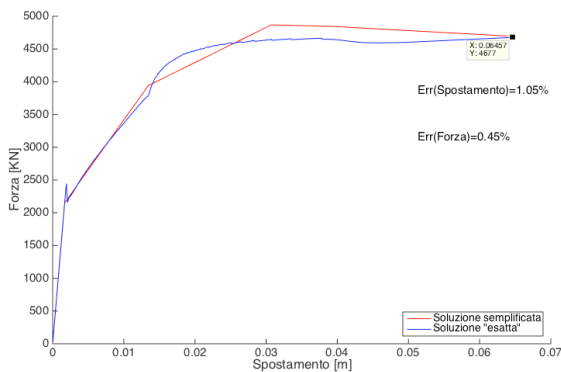


Figura 7. Confronto tra soluzione “esatta” e soluzione approssimata: Forza-Spostamento.

## 9 CONCLUSIONI

Al fine di redigere inventari di vulnerabilità sismica dei ponti a scala regionale sono indispensabili delle procedure speditive. Molte di queste sono basate sulla conoscenza del comportamento flessionale della sezione più sollecitata della pila critica. In questa memoria si presenta una soluzione in forma chiusa per la determinazione del diagramma Momento-Curvatura a 7 punti di una sezione circolare cava in C.A. a partire da pochi parametri di input. Dopo aver discusso le modalità adottate per ottenere la predetta soluzione essa è stata applicata ad un caso reale e confrontata con i risultati ottenuti con un software con approccio a fibre. Le differenze nei risultati sono molto piccole, soprattutto considerando la povertà dei dati di input necessari.

## 10 RINGRAZIAMENTI

Il presente lavoro di ricerca è stato in parte finanziato dal dipartimento di Protezione Civile, progetto ReLUIS-DPC 2014-2018.

## BIBLIOGRAFIA

- Borzi, B., Pinho, R., Crowley, H., 2007. Simplified vulnerability analysis for large scale assessment of RC buildings. *Engineering Structures*, **30**, 804-820.
- Esmaily, A., Peterman, R.J., 2005. Performance analysis tools for reinforced concrete members. *International Congress on Civil Engineering*.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R., 1988. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering*, **114**(8).
- Ministero delle infrastrutture e dei trasporti, DM 14 Gennaio 2008. Norme tecniche per le costruzioni. *Gazzetta ufficiale n.29*, Roma.

- Priestley, M.J.N., Calvi, G.M., Kowalsky, M.J., 2007. Displacement based design of structures. IUSS Press, Pavia.
- Raffaele, D., Gentile, R., Mezzina, M., 2015. Simplified closed-form solution for the determination of the Moment-Curvature response of a circular RC section. *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*. Accepted for presentation.
- Raffaele, D., Porco, F., D., Fiore, A., D., Uva, G., 2014a. Simplified assessment of seismic retrofitting interventions on RC circular piers in multi-span simply supported bridges, *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*, Shanghai, China.
- Raffaele, D., Porco, F., D., Fiore, A., D., Uva, G., 2014c. Simplified vulnerability assessment of reinforced concrete circular piers in multi-span simply supported bridges, *Structure and Infrastructure Engineering*, **10**(8), 950-962.
- Raffaele, D., Uva, G., Porco, F., D., Fiore, A., D., 2014b. About of seismic capacity of bridge piers: A simplified approach. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*, Shanghai, China.
- Uva, G., Porco, G., Porco, F., Fiore, A., 2013. Monitoring and safety for prestressed bridge girders by SOFO sensors. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, **3**(4), 3-18.