О неравенстве для чисел Бетти гиперкэлеровых многооообразий размерности шесть

Н. Курносов

Получено неравенство для чисел Бетти гиперкэлеровых многооообразий размерности шесть с помощью инвариантов Розанского-Виттена.

1. Введение

Гиперкэлеровым многообразием называется риманново многооообразие M с тройкой комплексных структур I, J и K, удовлетворяющих следующим свойствам:

(i) метрика g на M кэлерова для этих комплексных структур,

(ii) для эндоморфизмов I, J и K вещественного касательного расслоения выполнено $I \circ J = -J \circ I = K$, $I^2 = J^2 = K^2 = -1$.

Если компактное гиперкэлеровое многообразие M имеет $\pi_1(M) = 0$, $H^{2,0}(M) = \mathbb{C}$, то оно называется *простым (неприводимым)*. Согласно знаменитой теореме Богомолова, любое компактное гиперкэлеровое многообразие допускает конечно накрытие произведением тора и нескольких неприводимых гиперкэлеровых многообразий [1]. В комплексной размерности четыре и выше известно две серии гиперкэлеровых многообразий - схемы Гильберта n точек над $K3$ и обобщённые многообразия Куммера [2], а также два спорадических примера О'Грэди [10, 11]. Позднее было доказано, что пространства модулей векторных расслоений при других численных параметрах, отличных от тех, что дают примеры выше, не допускают симплектического разрешения [9].

Хойбрехтс [6] доказал конечность числа классов деформаций голоморфно симплектических структур на каждом гладком гиперкэлеровом многообразии. Тем не менее, открытой остаётся гипотеза Бовилля, утверждающая конечность числа компактных неприводимых гиперкэлеровых многообразий в каждой размерности. Гуан [5] доказал эту гипотезу в комплексной размерности четыре, в частности, второе число Бетти b_2 может принимать значения от 3 до 8 или 23.

В данной работе получено неравенство для чисел Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, соглашение 14-21-00052 от 11.08.14. Автор частично поддержан грантом МК-1297.2014.1 при доказательстве Леммы 1. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Мише Вербицкому за советы и обсуждение работы.

© Н. Курносов, 1966

Теорема 1. *Пусть M компактное неприводимое гиперкэлеровое многообразие размерности шесть, тогда выполнено*

$$97+\frac{37}{2}b_3-\frac{19}{2}b_4-\frac{1}{2}b_5+\frac{23}{2}h^{2,2}\leqslant\frac{38b_2^2-1030b_2+7572}{b_2+1} \tag{1}$$

2. Основные определения

1. Голоморфно симплектические многообразия. Комплексное многообразие M называется **голоморфно симплектическим**, если на нём существует замкнутая голоморфная 2-форма Ω, такая что $\Omega^n=\Omega\wedge\Omega\wedge\ldots\wedge\Omega$ – нигде невырожденное сечение канонического класса на M, где $2n=\dim_{\mathbb{C}}(M)$.

Замечание: Из теоремы Бохнера о занулении и классификации голономий Берже [3] следует, что гиперкэлерово многообразие имеет максимальную голономию $\mathrm{Sp}(n)$ тогда и только тогда, когда $\pi_1(M)=0$, $H^{2,0}(M)=\mathbb{C}$.

Простое вычисление ([3]) показывает, что форма

$$\Omega=\omega_J+\sqrt{-1}\omega_K \tag{2}$$

имеет тип $(2,0)$, и эта форма замкнутая, следовательно, голоморфная, а также нигде невырожденная. Эта форма называется **канонической голоморфно симплектической формой многообразия** M. Значит, комплексное многообразие (M,L) голоморфно симплектическое для всех гиперкэлеровых многообразий M и индуцированных комплексных структур L. Верно и обратное утверждение в предположении кэлеровости многообразия M.

Теорема 2. *([2], [3]) Пусть M компактное, кэлерово, голоморфно симплектическое многообразие с голоморфно симплектической формой Ω, w – кэлерова форма, $n=\dim_{\mathbb{C}}M$. Предположим, что $\int_M w^n=\int_M(Re\Omega)^n$. Тогда существует единственное гиперкэлерова структура (I,J,K,g) на M, такая что класс когомологий симплектической формы $w_I=g(\cdot,I\cdot)$ равен w и $\Omega=w_J+\sqrt{-1}w_K$.*

2. Форма Богомолова-Бовилля-Фуджики.

Теорема 3. *([4]) Пусть M неприводимое гиперкэлеровое многообразие и $2n=\dim_{\mathbb{C}}M$. Тогда существует примитивная квадратичная форма q на $H^2(M,\mathbb{Z})$ и целое число $\lambda>0$ такое, что $\int_M\eta^{2n}=\lambda q(\eta,\eta)^n$ для любой формы $\eta\in H^2(M)$.*

Форма q называется **формой Богомолова-Бовилля-Фуджики (ББФ)**. Она определяется соотношением Фуджики канонически, с точностью до знака. Для нечётных n знак определён однозначно. В случае чётного n выбор знака можно задать с помощью явной формулы для формы ББФ или неравенства

$$q(\Omega,\bar{\Omega})>0,\qquad 0\neq\Omega\in H^{2,0}(M).$$

3. Инварианты Розанского-Виттена. Определим инварианты Розанского-Виттена, следуя Хитчину и Сейвону [8, 12]. Рассмотрим простое гиперкэлерово многообразие M, тензор кривизны можно рассматривать как сечение $K \in \Omega^{1,1}(\operatorname{End} T)$. В локальных координатах тензор кривизны имеет вид $K^i_{jk\bar{l}}$. Используя голоморфно симплектическую 2-форму Ω, можно отождествить касательное и кокасательное расслоения, поэтому мы можем опустить первый индекс и определить форму

$$\Phi \in \Omega^{1,1}(T^* \otimes T^*) = \Omega^{0,1}(T^* \otimes T^* \otimes T^*)$$

по формуле

$$\Phi_{ijk\bar{l}} = \sum_m \Omega_{im} K^m_{jk\bar{l}}.$$

Этот тензор симметричен по индексам j, k, поскольку связность без кручения и сохраняет комплексную структуру. Поскольку кривизна принимает значения в алгебре Ли $Sp(2k, \mathbf{C})$ и состоит из матриц вида A^i_j, где $S_{ij} = \sum_k \omega_{ik} A^k_j$ и S_{ij} симметричные, поэтому тензор $\Phi_{ijk\bar{l}}$ также симметричен по индексам i, j. Значит, $\Phi \in \Omega^{0,1}(\operatorname{Sym}^3 T^*)$.

Пусть Γ тривалентный граф с чётным числом $2k$ вершин и без петель. Определим ориентацию графа Γ как класс эквивалентности цикличных порядков в каждой вершине, два таких порядка эквивалентны, если отличаются на чётном числе вершин. Зафиксируем ориентацию графа и рассмотрим тензор $\Phi \otimes \Phi \otimes \cdots \otimes \Phi$ с $2k$ сомножителями. Если вершины v_m и v_n $(m < n)$ соединены ребром, то свернём тензор с $\tilde{\Omega}$ на T^*, двойственной к Ω. Заметим, что при переходе к двойственному базису матрица Ω^{ij} для $\tilde{\Omega}$ минус обратная к Ω_{ij}. В результате получаем

$$c_{m,n} \Omega^{i_m i_n} \Phi \otimes \cdots \otimes \Phi_{i_m \dots} \otimes \cdots \otimes \Phi_{i_n \dots} \otimes \cdots \otimes \Phi,$$

где $c_{m,n} = 1$, если ребро ориентировано от v_m к v_n и $c_{m,n} = -1$ иначе. Проделав такую операцию по всем $3k$ рёбрам, мы получаем сечение $\bar{T}^* \otimes \cdots \otimes \bar{T}^*$. Спроецировав на внешнее произведение, получаем форму

$$\Gamma(\Phi) \in \Omega^{0,2k}.$$

Инвариантом Розанского-Виттена для тривалентного графа Γ на гиперкэлеровом многообразии M называется

$$b_\Gamma(M) = \frac{1}{(8\pi^2)^k k!} \int_M \Gamma(\Phi) \omega^k \tag{3}$$

Инварианты Розанского-Виттена постоянны на компонентах связности пространства модулей гиперкэлеровых метрик на M.

3. Доказательство Теоремы 1

Инварианты Розанского-Виттена подробно рассматривались в [8, 12], в частности получены формулы для инвариантов простых графов Θ^k (k копий графа Θ на двух вершинах) и Θ_2 (граф на 4 вершинах) через геометрические инварианты многообразия.

Для начала докажем следующую

Лемма 1. [12] *Пусть M неприводимое гиперкэлеровое многообразие комплексной размерности $2n$. Тогда*

$$-b_{\Theta^k} \leqslant (b_2 + 2(k-1)) b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}. \tag{4}$$

Доказательство:

Обозначим двойственную к форме ББФ форму в $Sym^2 H^2(M)$ за Q. Тогда c_2 представляется в виде $\mu Q + p$, где p лежит в примитивных когомологиях $H^4_{prim}(M)$. Тогда $c_2^2 = \mu^2 Q^2 + 2\mu Q p + p^2$, умножая на $\Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2}$ и интегрируя, имеем

$$\int_M c_2^2 \Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2} = \mu^2 \int_M Q^2 \Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2} + \int_M p^2 \Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2} \geqslant \mu^2 \int_M Q^2 \Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2},$$

где мы воспользовались ортогональностью $Q\Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2}$ и p. Константу μ можно опредлить, домножив равенство для c_2 на $\Omega^{n-1}\bar\Omega^{n-1}$ и проинтегрировав. Таким образом, получаем

$$\left(\int_M c_2^2 \Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2}\right)\left(\int_M Q\Omega^{n-1}\bar\Omega^{n-1}\right)^2 \geqslant \left(\int_M c_2 \Omega^{n-1}\bar\Omega^{n-1}\right)^2 \left(\int_M Q^2 \Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2}\right)$$

Домножив обе части неравенства на $(\int_M c_2 \Omega^{n-1}\bar\Omega^{n-1})^{n-2}/(\int_M \Omega^n \bar\Omega^n)$ и, используя формулы для b_{Θ^k} и $b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}$, получаем неравенство.

$$n(b_{\Theta^n} + 2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2})\left(\int_M Q\Omega^{n-1}\bar\Omega^{n-1}\right)^2 \geqslant (n-1) b_{\Theta^n}\left(\int_M Q^2\Omega^{n-2}\bar\Omega^{n-2}\right)\left(\int_M \Omega^n\bar\Omega^n\right)$$

Заметим, что мы можем перейти от $\Omega\bar\Omega$ к $\Omega+\bar\Omega$. Полученное неравенство остаётся верным и после деформации комплексной структуры, а значит, мы можем заменить $\Omega+\bar\Omega$ на произвольную форму u. Тем самым мы получаем неравенство

$$(2n-1)(b_{\Theta^n} + 2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2})\left(\int_M Q u^{2n-2}\right)^2 \geqslant (2n-3) b_{\Theta^n}\left(\int_M Q^2 u^{2n-4}\right)\left(\int_M u^{2n}\right) \tag{5}$$

Пусть $e_1, \dots e_{b_2}$ ортонормальный базис на $H^2(M, \mathbb{C})$ такой, что $Q = \sum_{i=1}^{b_2} e_i^2$. А в качестве формы u возьмём $\sum_{i=1}^{b_2} e_i$. Тогда, пользуясь формулой Фуджики и [7; Следствие 23.17], получаем

$$\int_M Q u^{2n-2} = \lambda_Q q\left(\sum e_i\right)\right)^{n-1} = \lambda\left(\frac{b_2 + 2n - 2}{2n-1}\right) b_2^{n-1}$$

и

$$\int_M Q^2 u^{2n-4} = \lambda_{Q^2} q(\sum e_i))^{n-1} = \lambda(\frac{(b_2+2n-2)(b_2+2n-4)}{(2n-1)(2n-3)})b_2^{n-2},$$

где $\lambda = \int_M e_i^{2n}$. Таким образом, подставляя всё это в неравенство 5, получаем требуемое. ■

Используя формулу "пузырьков"[12; стр. 68], получаем выражение для инварианта Розанского-Виттена графа $\Theta^{k-2}\Theta_2$.

$$b_{\Theta^{k-2}\Theta_2} = -2^{k-2}(24)^{k-1}(k-2)!(48k+s_2)\,\mathrm{Td}^{1/2}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{Td}^{1/2}$ мультипликативная последовательность классов Понтрягина, определённая степенным рядом $(\frac{\sqrt{z}/2}{sinh\sqrt{z}/2})^{1/2}$, а s_2 нормированный класс Черна. Производящая функция для $\mathrm{Td}^{1/2}$ получена в [12; Теорема 10] и может быть выражена в терминах классов Черна.

Для графа Θ^k имеем [8] $b_{\Theta^{k-2}\Theta_2} = 48^k k!\,\mathrm{Td}^{1/2}$

В размерности четыре лемма 1 даёт в точности результат Гуана [5].

В размерности шесть ($k=3$), используя значения инвариантов Розанского-Виттена, получаем из леммы 1 следующее неравенство

$$\begin{aligned}(-s_2^3 - \frac{12}{5}s_2 s_4 - \frac{64}{35}s_6) \geqslant (b_2+4)(2\cdot 24^2(48\cdot 3+s_2)(1-(\frac{1}{48})s_2 \\ +(\frac{1}{48^2 2!})(s_2^2+\frac{4}{5}s_4) - (\frac{1}{48^3 3!})(s_2^3+\frac{12}{5}s_2 s_4+\frac{64}{35}s_6)),\end{aligned} \qquad (7)$$

которое можно упростить, выразив классы Черна через $\chi^i = \sum_{j=0}^n h^{i,j}$ ([12; стр. 123]):

$$3(3948+19\chi^1+\chi^2) \geqslant (b_2+4)(1068+19\chi^1+\chi^2). \qquad (8)$$

Заметим, что по определению $\chi^1 = 5-2b_2+b_3-\frac{1}{2}b_4+\frac{1}{2}h^{2,2}$ и $\chi^2 = 2-\frac{1}{2}b_3+2h^{2,2}-\frac{1}{2}b_5$. Подставив в предыдущее неравенство, получаем искомое. ■

Замечание 1: В случае $\mathrm{Hilb}^3(K3)$ выполнено равенство.

Замечание 2: Поскольку различных чисел Бетти пять, а чисел Ходжа шесть, то, в отличии от случая размерности четыре, полностью исключить последние нельзя. В размерности восемь ситуация сложнее, поскольку числа Черна неоднозначно выражаются через χ^i.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bogomolov, F.A., *On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class*, Math. USSR-Sb., 22, pp. 580 - 583, 1974. **[2]** Beauville, A., *Varietes Kahleriennes dont la premi‘ere classe de Chern est nulle*, J.

Diff. Geom., 18, pp. 755-782, 1983. **[3]** Besse, A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1987. **[4]** Fujiki, A., *On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold*, Adv. St. Pure Math, 10, pp. 105-16, 1987. **[5]** Guan, D., *On the Betti numbers of irreducible compact hyperkähler manifolds of complex dimension four*, Math. Res. Lett., 8, 5-6, pp 663-669, 2001. **[6]** Huybrechts, D., *Finiteness results for hyperkähler manifolds*, arXiv:math/0109024v1 [math.AG], 2001. **[7]** Huybrechts, D., *Compact Hyperkähler Manifolds In book M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, Calabi-Yau manifolds and related geometries*, Springer Universitext, 2002. **[8]** Hitchin, N., Sawon J., *Curvature and Characteristic Numbers of Hyperkähler Manifolds*, Duke Math. J., 106(3), pp. 599-615, 2001. **[9]** Kaledin, D., Lehn, M., Sorger, Ch., *Singular symplectic moduli spaces*, Invent. Math., 164, no. 3, pp. 591–614, 2006. **[10]** O'Grady, K.G., *Desingularized moduli spaces of sheaves on a* $K3$, J. fur die reine und angew. Math., 512, pp. 49-117, 1999. **[11]** O'Grady, K.G., *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, J. Algebraic Geom., 12, pp. 435-505, 2003. **[12]** Sawon J., *Rozansky-Witten Invariants of Hyperkähler Manifolds*, PhD thesis University of Cambridge, 1999.

Н. Курносов
Лаборатория Алгебраической Геометрии и её приложений, Факультет математики НИУ ВШЭ, Независимый Московский Университет
E-mail: `nikon.kurnosov@gmail.com`

Поступило
03.07.2015

-